را با هم جمع می‌کنیم و سپس اختلاف بین آن مکان ($\vec{C}$) و آبادی (یعنی $\vec{B}$) را پیدا می‌کنیم. با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه داریم

$$\vec{C} = (24\angle -15°) + (8.0\angle 90°) = (23.25\angle 4.41°)$$

در نتیجه داریم

$$\vec{B} - \vec{C} = (25\angle 0°) - (23.25\angle 4.41°) = (2.5\angle -45°)$$

بنابراین، فاصله‌ی مورد نظر ۲٫۶ km است.

** ۲۶ مجموع چهار بردار زیر را: (الف) با نمادگذاری بردارهای یکه، و به صورت (ب) بزرگی و (پ) زاویه، به دست آورید.

$$\vec{A} = (2.00\,\mathrm{m})\hat{i} + (3.00\,\mathrm{m})\hat{j} \qquad \vec{B}: 4.00\,\mathrm{m}\ ,\ +65.0°$$

$$\vec{C} = (-4.00\,\mathrm{m})\hat{i} + (-6.00\,\mathrm{m})\hat{j} \qquad \vec{D}: 5.00\,\mathrm{m}\ ,\ -235°$$

حل: معادله‌ی برداری به صورت $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$ است. بردارهای $\vec{B}$ و $\vec{D}$ را با استفاده از نمادگذاری بردار یکه به صورت $(1.69\hat{i} + 3.63\hat{j})\mathrm{m}$ و $(-2.87\hat{i} + 4.10\hat{j})\mathrm{m}$ می‌نویسیم.

(الف) با جمع کردن مؤلفه‌های متناظر داریم

$$\vec{R} = (-3.18\,\mathrm{m})\hat{i} + (4.72\,\mathrm{m})\hat{j}$$

(ب) بزرگی بردار را با استفاده از معادله‌ی ۳-۶ به دست می‌آوریم:

$$|\vec{R}| = \sqrt{(-3.18\,\mathrm{m})^2 + (4.72\,\mathrm{m})^2} = 5.69\,\mathrm{m}$$

(پ) زاویه برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4.72\,\mathrm{m}}{-3.18\,\mathrm{m}}\right) = -56.0° \quad (\text{نسبت به محور } -x)$$

اگر زاویه در جهت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ اندازه‌گیری شود، مساوی با $180° - 56.0° = 124°$ است. بنابراین، با تبدیل کردن این نتیجه به مختصات قطبی، داریم

$$(-3.18\ ,\ 4.72) \to (5.69\angle 124°)$$

** ۲۷ اگر داشته باشیم $\vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 5\vec{d}_3$، $\vec{d}_1 - \vec{d}_2 = 3\vec{d}_3$ و $\vec{d}_3 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$، (الف) $\vec{d}_1$ و (ب) $\vec{d}_2$ با نمادگذاری بردارهای یکه، چه خواهند بود؟

حل: معادله‌ها را به طور هم‌زمان حل می‌کنیم، در نتیجه داریم

(الف) $\vec{d}_1 = 4\vec{d}_3 = 8\hat{i} + 16\hat{j}$

(ب) $\vec{d}_2 = \vec{d}_3 = 2\hat{i} + 4\hat{j}$

** ۲۸ دو سوسک روی یک سطح صاف شنی از یک‌نقطه شروع به حرکت می‌کنند. سوسک ۱ به اندازه‌ی ۰٫۵m به سمت خاور و سپس به اندازه‌ی ۰٫۷۰m در جهت، زاویه‌ی ۳۰° شمال محور خاوری پیش می‌رود. سوسک ۲ نیز دو حرکت انجام می‌دهد، که حرکت اولش به اندازه‌ی ۱٫۶m در جهت زاویه‌ی ۴۰° خاور محور شمالی است. (الف) بزرگی و (ب) جهت حرکت دوم این سوسک چه باید باشد تا به محل جدید سوسک ۱ برسد؟

حل: فرض کنید $\vec{A}$ معرّف قسمت اول حرکت سوسک ۱ (۰٫۵ m به سمت خاور یا $0.5\,\hat{i}$) و $\vec{C}$ معرف قسمت اول حرکت سوسک ۲ (۱٫۶ m تحت زاویه‌ی ۵۰° شمال محور خاوری) است. برای قسمت‌های دوم حرکت سوسک‌ها داریم: $\vec{B}$ به اندازه‌ی ۰٫۷ m در جهت زاویه‌ی ۳۰° شمال محور خاوری و $\vec{D}$ مجهول است. مکان پایانی سوسک ۱ عبارت است از

$$\vec{A} + \vec{B} = (0.8\,\mathrm{m})\hat{i} + (0.7\,\mathrm{m})(\cos 30°\,\hat{i} + \sin 30°\,\hat{j})$$
$$= (1.4\,\mathrm{m})\hat{i} + (0.35\,\mathrm{m})\hat{j}$$

معادله‌ی مربوط به صورت $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} + \vec{D}$ است که در آن $\vec{C}$ برابر است با

$$\vec{C} = (1.60\,\mathrm{m})(\cos 50.0°\,\hat{i} + \sin 50.0°\,\hat{j})$$
$$= (1.03\,\mathrm{m})\hat{i} + (1.23\,\mathrm{m})\hat{j}$$

(الف) بردار $\vec{D}$ به صورت زیر به دست می‌آید

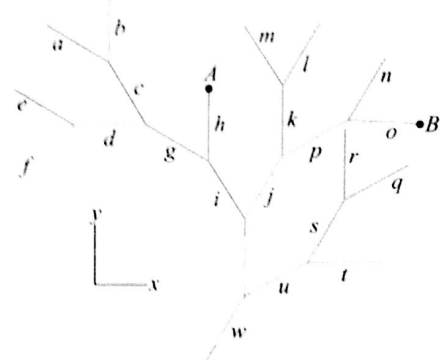
$$\vec{D} = \vec{A} + \vec{B} - \vec{C} = (0.37\,\mathrm{m})\hat{i} + (-0.88\,\mathrm{m})\hat{j}$$

بزرگی این بردار $D = 0.88\,\mathrm{m}$ است.

(ب) زاویه مساوی با $\tan^{-1}(-0.88/0.37) = -67.2°$ است که به معنی ۸۵° جنوب محور خاوری (یا ۵° خاور محور جنوبی) است.

** ۲۹ مورچه‌های توی حیاط خانه، اغلب، یک شبکه از ردهای آغشته به‌مواد شیمیایی برای هدایت در مسیر حرکتشان به جا می‌گذارند. این ردها با دور شدن از لانه به‌طور مرتب دنباله‌ای از شاخه‌ها (*دو شاخه‌ها*) ایجاد می‌کنند و زاویه‌ی میان شاخه‌ها ۶۰° است. هرگاه مورچه‌ی سرگردانی به یکی از این شاخه‌ها برسد می‌تواند راه خود را به سوی لانه پیدا کند. اگر مورچه در حال دورشدن از لانه باشد دو راه انتخاب شامل یک چرخش کوچک در مسیر خود دارد، که یکی تحت زاویه‌ی ۳۰° به

سمت چپ و دیگری تحت زاویه‌ی 30° به سمت راست است. اما اگر مورچه در حال نزدیک شدن به لانه باشد فقط یک راه انتخاب دارد. شکل ۳-۲۹، نمونه‌ای از یک رد به جا مانده از مورچه را نشان می‌دهد که شامل شاخه‌های راست نام‌گذاری شده به طول $2/0\,\text{cm}$ است و زاویه‌ی میان هر دو شاخگی به‌طور متقارن 60° است. مسیر v با محور y موازی است. اگر مورچه از نقطه‌ی A به این شبکه وارد شود، (الف) بزرگی و(ب) زاویه‌ی جابه‌جایی (نسبت به جهت مثبت محور x در شکل) از لانه (که می‌توانید آن‌را در شکل پیدا کنید) چیست؟ اگر مورچه از نقطه‌ی B به شبکه وارد شود، (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی بردار جابه‌جایی چیست؟



شکل ۳-۲۹ مسئله‌ی ۲۹.

حل: فرض کنید $l_0 = 2/0\,\text{cm}$ طول هر رد باشد. لانه در نقطه‌ی پایانی رد w قرار دارد.

(الف) با استفاده از نمادگذاری بردار یکه، بردار جابه‌جایی برای نقطه‌ی A برابر است با

$$\vec{d}_A = \vec{w} + \vec{v} + \vec{i} + \vec{h} = l_0(\cos 60^\circ\,\hat{i} + \sin 60^\circ\,\hat{j}) + (l_0\hat{j}) + l_0(\cos 120^\circ\,\hat{i} + \sin 120^\circ\,\hat{j}) + (l_0\hat{j}) = (2+\sqrt{3})l_0\hat{j}$$

در نتیجه بزرگی بردار جابه‌جایی $\vec{d}_A$ برابر است با

$$|\vec{d}_A| = (2+\sqrt{3})(2/0\,\text{cm}) = 7/5\,\text{cm}$$

(ب) زاویه‌ی جابه‌جایی $\vec{d}_A$ برابر است با

$$\theta = \tan^{-1}(d_{A,y}/d_{A,x}) = \tan^{-1}(\infty) = 90^\circ$$

(پ) به طور مشابه، بردار جابه‌جایی برای نقطه‌ی B برابر است با

$$\vec{d}_B = \vec{w} + \vec{v} + \vec{j} + \vec{p} + \vec{o} = l_0(\cos 60^\circ\,\hat{i} + \sin 60^\circ\,\hat{j}) + (l_0\hat{j}) + l_0(\cos 60^\circ\,\hat{i} + \sin 60^\circ\,\hat{j}) + l_0(\cos 30^\circ\,\hat{i} + \sin 30^\circ\,\hat{j})$$

$$= \left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)l_0\hat{i} + \left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)l_0\hat{j}$$

در نتیجه بزرگی بردار $\vec{d}_B$ برابر است با

$$|\vec{d}_B| = l_0\sqrt{\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)^2} = (2/0\,\text{cm})(4/3) = 8/6\,\text{cm}$$

(ت) زاویه‌ی بردار جابه‌جایی برابر است با

$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{d_{B,y}}{d_{B,x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3/2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}/2}\right) = \tan^{-1}(1/13) = 48^\circ$$

۳۰ ●● دو بردار زیر مفروض‌اند

$$\vec{a} = (4/0\,\text{m})\hat{i} - (3/0\,\text{m})\hat{j}$$

و

$$\vec{b} = (6/0\,\text{m})\hat{i} + (8/0\,\text{m})\hat{j}$$

مطلوب است تعیین (الف) بزرگی و (ب) زاویه‌ی بردار $\vec{a}$ (نسبت به $\hat{i}$)؛ (پ) بزرگی و (ت) زاویه‌ی بردار $\vec{b}$؛ (ث) بزرگی و (ج) زاویه‌ی بردار $\vec{a}+\vec{b}$؛ (چ) بزرگی و (ح) زاویه‌ی بردار $\vec{b}-\vec{a}$؛ (خ) بزرگی و (د) زاویه‌ی بردار $\vec{a}-\vec{b}$؛ (ذ) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{b}-\vec{a}$ و $\vec{a}-\vec{b}$.

حل: (الف) بزرگی بردار $\vec{a}$ برابر است با

$$a = \sqrt{(4/0\,\text{m})^2 + (-3/0\,\text{m})^2} = 5/0\,\text{m}$$

(ب) زاویه‌ی بین بردار $\vec{a}$ و محور $+x$ برابر است با

$$\tan^{-1}[(-3/0\,\text{m})/(4/0\,\text{m})] = -37^\circ$$

این بردار در جهت **ساعتگرد** تحت زاویه‌ی 37° نسبت به محور x (که با $\hat{i}$ مشخص شده است) قرار دارد.

(پ) بزرگی بردار $\vec{b}$ برابر است با $b = \sqrt{(6/0\,\text{m})^2 + (8/0\,\text{m})^2} = 10\,\text{m}$

(ت) زاویه‌ی بین بردار $\vec{b}$ و محور $+x$ برابر است با

$$\tan^{-1}[(8/0\,\text{m})/(6/0\,\text{m})] = 53^\circ$$

(ث) بردار $\vec{a}+\vec{b}$ برابر است با

$$\vec{a}+\vec{b} = (4/0\,\text{m} + 6/0\,\text{m})\hat{i} + [(-3/0\,\text{m}) + 8/0\,\text{m}]\hat{j} = (10\,\text{m})\hat{i} + (5/0\,\text{m})\hat{j}$$

بزرگی این بردار $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{(10\,\text{m})^2 + (5/0\,\text{m})^2} = 11\,\text{m}$ است.

(ج) زاویه‌ی بین بردار توصیف شده در قسمت (ث) و محور $+x$ برابر است با $\tan^{-1}[(5/0\,\text{m})/(10\,\text{m})] = 27^\circ$

(چ) بردار $\vec{b}-\vec{a}$ برابر است با

$$\vec{b}-\vec{a}=(۶/۰\,\text{m}-۴/۰\,\text{m})\,\hat{i}+[۸/۰\,\text{m}-(-۳/۰\,\text{m})]\,\hat{j}$$
$$=(۲/۰\,\text{m})\,\hat{i}+(۱۱\,\text{m})\,\hat{j}$$

بزرگی این بردار $|\vec{b}-\vec{a}|=\sqrt{(۲/۰\,\text{m})^۲+(۱۱\,\text{m})^۲}=۱۱\,\text{m}$ است که دقیقاً با مقدار $|\vec{a}+\vec{b}|$ برابر است (زیرا بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ عمود است).

(ح) زاویه‌ی بین بردار توصیف شده در قسمت (چ) و محور $+x$ برابر است با $\tan^{-1}[(۱۱\,\text{m})/(۲/۰\,\text{m})]=۸۰^\circ$.

(خ) بردار $\vec{a}-\vec{b}$ برابر است با

$$\vec{a}-\vec{b}=(۴/۰\,\text{m}-۶/۰\,\text{m})\,\hat{i}+[(-۳/۰\,\text{m})-۸/۰\,\text{m}]\,\hat{i}$$
$$=(-۲/۰\,\text{m})\,\hat{i}+(-۱۱\,\text{m})\,\hat{j}$$

بزرگی این بردار $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{(-۲/۰\,\text{m})^۲+(-۱۱\,\text{m})^۲}=۱۱\,\text{m}$ است.

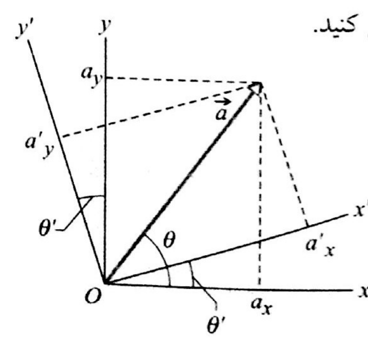
(د) محاسبه‌ی ساده برای زاویه‌ی بین بردار توصیف شده در قسمت (خ) نسبت به محور $+x$، دو جواب

$$\tan^{-1}[(-۱۱\,\text{m})/(-۲/۰\,\text{m})]=۸۰^\circ \quad \text{و} \quad ۱۸۰^\circ+۸۰^\circ=۲۶۰^\circ$$

را به دست می‌دهد. جواب دوم درست است [به حل قسمت (ذ) رجوع کنید].

(ذ) چون $\vec{a}-\vec{b}=(-۱)(\vec{b}-\vec{a})$، لذا جهت دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}-\vec{a}$ مخالف یکدیگر (پاد موازی) است؛ زاویه‌ی بین آن‌ها ۱۸۰° است.

**** ۳۱** در شکل ۳-۳۰، بردار $\vec{a}$ با بزرگی $۱۷/۰\,\text{m}$ تحت زاویه‌ی $\theta=۵۶/۰^\circ$ به صورت پادساعتگرد نسبت به محور $+x$ قرار دارد. مؤلفه‌های (الف) a_x و (ب) a_y، این بردار را پیدا کنید. یک دستگاه مختصات دیگر تحت زاویه‌ی $\theta'=۱۸/۰^\circ$ نسبت به این دستگاه مختصات قرار گرفته است. مؤلفه‌های (پ) a'_x و (ت) a'_y را در این دستگاه مختصات پریم‌دار معین کنید.



شکل ۳-۳۰ مسئله‌ی ۳۱.

حل: (الف) به ازای $a=۱۷/۰\,\text{m}$ و $\theta=۵۶/۰^\circ$ داریم

$$a_x=a\cos\theta=۹/۵\,\text{m}$$

(ب) به طور مشابه داریم $a_y=a\sin\theta=۱۴/۱\,\text{m}$.

(پ) زاویه نسبت به دستگاه مختصات جدید برابر است با

$$\theta'=(۵۶/۰^\circ-۱۸/۰^\circ)=۳۸/۰^\circ$$

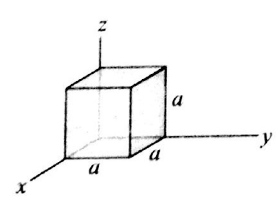
در نتیجه داریم:

$$a'_x=a\cos\theta'=۱۳/۴\,\text{m}$$

(ت) به طور مشابه داریم:

$$a'_y=a\sin\theta'=۱۰/۵\,\text{m}.$$

***** ۳۲** شکل ۳-۳۱، مکعبی به ضلع a را نشان می‌دهد که یک گوشه‌ی آن در مبداء دستگاه محورهای مختصات xyz قرار دارد. ***قطر اصلی*** خطی است که از یک‌گوشه‌ی مکعب با عبور از مرکز به گوشه‌ی مقابل وصل می‌شود. با استفاده از نمادگذاری بردارهای یکه قطر اصلی مکعب را چنان پیدا کنید که از یکی از نقاط با مختصات x، y و z زیر آغاز شود: (الف) مختصات (۰، ۰ و ۰)، (ب) مختصات (a، ۰ و ۰)، (پ) مختصات (۰، a و ۰)، و (ت) مختصات (a، a و ۰). (ث) زاویه‌ی میان قطرهای اصلی را با هر یک از ضلع‌های مجاور معین کنید. (ج) طول قطرهای اصلی را برحسب a حساب کنید.

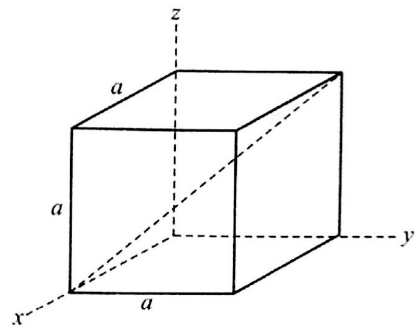


شکل ۳-۳۱ مسئله‌ی ۳۲.

حل: (الف) همان‌طور که شکل ۳-۳۰ نشان می‌دهد، بردار مکان قطری که نقطه‌ی مبداء (۰،۰،۰) را به نقطه‌ی متقابل وصل می‌کند، $a\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$ است و این بردار در راستای «قطر حجمی» واقع است.

(ب) از نقطه‌ی آغاز $(a,۰,۰)$، که متناظر با بردار مکان $a\hat{i}$ است، نقطه‌ی متقابل قطری $(۰,a,a)$ با بردار مکان $a\hat{j}+a\hat{k}$ است.

بنابراین، بردار در راستای خط، با تفاضل $-a\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$ برابر است.



(پ) اگر نقطه‌ی آغاز $(۰,a,۰)$ با بردار مکان $a\hat{j}$ باشد، نقطه‌ی متقابل قطری $(a,۰,a)$ با بردار مکان $a\hat{i}+a\hat{k}$ است. بنابراین، بردار در راستای خط، با تفاضل $a\hat{i}-a\hat{j}+a\hat{k}$ برابر است.

(ت) اگر نقطه‌ی آغاز $(۰,a,a)$ با بردار مکان $a\hat{i}+a\hat{j}$ باشد، نقطه‌ی متقابل قطری $(a,۰,۰)$ با بردار مکان $a\hat{k}$ است. بنابراین، بردار در راستای خط، با تفاضل $-a\hat{i}-a\hat{j}+a\hat{k}$ برابر است.

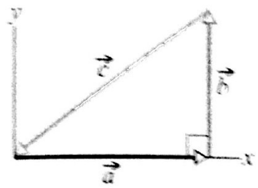
(ث) بردار رسم شده از گوشه‌ی سمت چپ پایین واقع در پشت مکعب تا گوشه‌ی سمت راست بالا را در نظر بگیرید. این بردار به‌صورت $a\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}$ است. می‌توان فکر کرد که این بردار با مجموع بردار $a\hat{i}$ به موازات محور x و بردار $a\hat{j}+a\hat{k}$ عمود بر محور x، برابر است. تانژانت زاویه‌ی بین این بردار و محور x، از تقسیم مؤلفه‌ی عمودی به مؤلفه‌ی موازی به دست می‌آید. چون بزرگی مؤلفه‌ی عمودی $\sqrt{a^۲+a^۲}=a\sqrt{۲}$ و بزرگی مؤلفه‌ی موازی a است، داریم $\tan\theta=(a\sqrt{۲})/a=\sqrt{۲}$. در نتیجه $\theta=۵۴/۷^\circ$ است. زاویه‌ی بین این بردار (قطر) و هر یک از ضلع‌های مجاور (محورهای y و z) با زاویه‌ی بین بردارهای قطری دیگر و ضلع‌های مجاور آن‌ها، برابر است.

(ج) طول هر قطر اصلی برابر است با:

$$\sqrt{a^۲+a^۲+a^۲}=a\sqrt{۳}.$$

پودمان ۳-۳ ضرب کردن بردارها

* ۳۳ در بردارهای شکل ۳-۳۲، داریم $a=۴$، $b=۳$، و $c=۵$. (الف) بزرگی و (ب) جهت بردار $\vec{a}\times\vec{b}$، (پ) بزرگی و (ت) جهت بردار $\vec{a}\times\vec{c}$، و (ث) بزرگی و (ج) جهت بردار $\vec{b}\times\vec{c}$ چیست؟ (محور z نشان داده نشده است).



شکل ۳-۳۲ مسئله‌های ۳۳ و ۵۴.

حل: با توجه به شکل داریم $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=۰$، که در آن $\vec{a}\perp\vec{b}$ است.

(الف) $|\vec{a}\times\vec{b}|=(۳/۰)(۴/۰)=۱۲$، زیرا زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مساوی با ۹۰° است.

(ب) با استفاده از قاعده‌ی دست راست معلوم می‌شود که جهت بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ در جهت $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ یا در جهت $+z$ است.

(پ) $|\vec{a}\times\vec{c}|=|\vec{a}\times(-\vec{a}-\vec{b})|=|-(\vec{a}\times\vec{b})|=۱۲$

(ت) جهت بردار $-\vec{a}\times\vec{b}$ در جهت $-\hat{i}\times\hat{j}=-\hat{k}$ یا در جهت $-z$ است.

(ث) $|\vec{b}\times\vec{c}|=|\vec{b}\times(-\vec{a}-\vec{b})|=|-(\vec{b}\times\vec{a})|=|(\vec{a}\times\vec{b})|=۱۲$

(ج) مانند قسمت (الف)، جهت بردار در جهت $+z$ است.

* ۳۴ دو بردار به‌صورت $\vec{a}=۳/۰\hat{i}+۵/۰\hat{j}$ و $\vec{b}=۲/۰\hat{i}+۴/۰\hat{j}$ داده شده‌اند. مطلوب است تعیین (الف) $\vec{a}\times\vec{b}$، (ب) $\vec{a}\cdot\vec{b}$، (پ) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}$ و (ت) تصویر بردار $\vec{a}$ در راستای بردار $\vec{b}$. [*راهنمایی*: برای قسمت (ت) معادله‌ی ۳-۲۰ و شکل ۳-۱۸ را در نظر بگیرید].

حل: از معادلات ۳-۳۰ و ۳-۲۳ استفاده می‌کنیم.

(الف) $\vec{a}\times\vec{b}=(a_x b_x - a_y b_y)\hat{k}$، زیرا جملات دیگر حذف می‌شوند و علت امر این است که $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مؤلفه‌ی z ندارند. بنابراین، داریم $[(۳/۰)(۴/۰)-(۵/۰)(۲/۰)]\hat{k}=۲/۰\hat{k}$.

(ب) $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x+a_y b_y=(۳/۰)(۲/۰)+(۵/۰)(۴/۰)=۲۶$

(پ) $\vec{a}+\vec{b}=(۳/۰+۲/۰)\hat{i}+(۵/۰+۴/۰)\hat{j}$

$$\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=(۵/۰)(۲/۰)+(۹/۰)(۴/۰)=۴۶$$

(ت) چند راه حل وجود دارد. در این مسئله بردار یکه‌ی $\hat{b}$ را

به‌دست می‌آوریم و آن را به صورت «نقطه‌ای» در بردار $\vec{a}$ ضرب می‌کنیم. در این حالت، بردار یکه $\hat{b}$ برابر است با

$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{۲/۰\,\hat{i} + ۴/۰\,\hat{j}}{\sqrt{(۲/۰)^{۲} + (۴/۰)^{۲}}}$$

در نتیجه داریم:

$$a_b = \vec{a} \cdot \hat{b} = \frac{(۳/۰)(۲/۰) + (۵/۰)(۴/۰)}{\sqrt{(۲/۰)^{۲} + (۴/۰)^{۲}}} = ۵/۸$$

* ۳۵ دو بردار $\vec{r}$ و $\vec{s}$ در صفحه‌ی xy واقع‌اند. بزرگی‌های آن‌ها، به ترتیب، ۴/۵۰ واحد و ۷/۳۰ واحد و زاویه‌های جهت‌های آن‌ها، ۳۲۰° و $۸۵/۰^\circ$ به صورت پادساعتگرد نسبت به محور x مثبت است. کمیت‌های (الف) $\vec{r} \cdot \vec{s}$ و (ب) $\vec{r} \times \vec{s}$، را پیدا کنید.

حل: (الف) ضرب نرده‌ای (نقطه‌ای) برابر است با

$$(۴/۵۰)(۷/۳۰)\cos(۳۲۰^\circ - ۸۵/۰^\circ) = -۱۸/۸$$

(ب) حاصل‌ضرب برداری (بر طبق قاعده‌ی دست راست) در جهت $\hat{k}$ و بزرگی آن برابر است با

$$|(۴/۵۰)(۷/۳۰)\sin(۳۲۰^\circ - ۸۵/۰^\circ)| = ۲۶/۹$$

* ۳۶ اگر داشته باشیم $\vec{d}_۱ = ۳\hat{i} - ۲\hat{j} + ۴\hat{k}$ و $\vec{d}_۲ = -۵\hat{i} + ۲\hat{j} - \hat{k}$، حاصل عبارت $(\vec{d}_۱ + \vec{d}_۲) \cdot (\vec{d}_۱ \times ۴\vec{d}_۲)$ چیست؟

حل: ابتدا رابطه‌ی داده شده را به صورت $۴(\vec{d}_{\text{صفحه}} \cdot \vec{d}_{\text{ضرب}})$ می‌نویسیم، که در آن $\vec{d}_{\text{صفحه}} = \vec{d}_۱ + \vec{d}_۲$ و در صفحه‌ی متشکل از $\vec{d}_۱$ و $\vec{d}_۲$ است، و $\vec{d}_{\text{ضرب}} = \vec{d}_۱ \times \vec{d}_۲$. توجه کنید که $d_{\text{ضرب}}$ بر صفحه‌ی متشکل از $\vec{d}_۱$ و $\vec{d}_۲$ عمود است، و می‌بینیم که جواب باید صفر باشد (حاصل‌ضرب نرده‌ای بردارهای عمود بر هم صفر است).

* ۳۷ سه بردار به صورت $\vec{a} = ۳/۰\,\hat{i} + ۳/۰\,\hat{j} - ۲/۰\,\hat{k}$، $\vec{b} = -۱/۰\,\hat{i} - ۴/۰\,\hat{j} + ۲/۰\,\hat{k}$، و $\vec{c} = ۲/۰\,\hat{i} + ۲/۰\,\hat{j} + ۱/۰\,\hat{k}$ داده شده‌اند. مطلوب است تعیین (الف) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$، (ب) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$، و (پ) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$.

حل: از معادلات ۳-۳۰ و ۳-۲۳ استفاده می‌کنیم.

(الف) چون $\vec{b} \times \vec{c} = -۸/۰\,\hat{i} + ۵/۰\,\hat{j} + ۶/۰\,\hat{k}$، لذا داریم

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (۳/۰)(-۸/۰) + (۳/۰)(۵/۰) + (-۲/۰)(۶/۰) = -۲۱$$

(ب) چون $\vec{b} + \vec{c} = ۱/۰\,\hat{i} - ۲/۰\,\hat{j} + ۳/۰\,\hat{k}$، در نتیجه داریم

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (۳/۰)(۱/۰) + (۳/۰)(-۲/۰) + (-۲/۰)(۳/۰) = -۹/۰$$

(پ) سرانجام داریم:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = [(۳/۰)(۳/۰) - (-۲/۰)(-۲/۰)]\hat{i} + [(-۲/۰)(۱/۰) - (۳/۰)(۳/۰)]\hat{j} + [(۳/۰)(-۲/۰) - (۳/۰)(۱/۰)]\hat{k} = ۵\hat{i} - ۱۱\hat{j} - ۹\hat{k}$$

** ۳۸ سه بردار زیر مفروض‌اند:

$$\vec{A} = ۲/۰۰\,\hat{i} + ۳/۰۰\,\hat{j} - ۴/۰۰\,\hat{k}$$
$$\vec{B} = -۳/۰۰\,\hat{i} + ۴/۰۰\,\hat{j} + ۲/۰۰\,\hat{k}$$
$$\vec{C} = ۷/۰۰\,\hat{i} - ۸/۰۰\,\hat{j}$$

حاصل عبارت $۳\vec{C} \cdot (۲\vec{A} \times \vec{B})$ چیست؟

حل: می‌دانیم که

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}\,,\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}\,,\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

در نتیجه داریم:

$$۲\vec{A} \times \vec{B} = ۲(۲/۰۰\,\hat{i} + ۳/۰۰\,\hat{j} - ۴/۰۰\,\hat{k}) \times (-۳/۰۰\,\hat{i} + ۴/۰۰\,\hat{j} + ۲/۰۰\,\hat{k}) = ۴۴/۰\,\hat{i} + ۱۶/۰\,\hat{j} + ۳۴/۰\,\hat{k}$$

سپس با استفاده از روابط

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = ۱$$
$$\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = ۰$$

داریم

$$۳\vec{C} \cdot (۲\vec{A} \times \vec{B}) = ۳(۷/۰۰\,\hat{i} - ۸/۰۰\,\hat{j}) \cdot (۴۴/۰\,\hat{i} + ۱۶/۰\,\hat{j} + ۳۴/۰\,\hat{k}) = ۳[(۷/۰۰)(۴۴/۰) + (-۸/۰۰)(۱۶/۰) + (۰)(۳۴/۰)] = ۵۴۰$$

** ۳۹ بردار $\vec{A}$ دارای بزرگی ۶/۰۰ واحد، بردار $\vec{B}$ دارای بزرگی ۷/۰۰ واحد، و حاصل $\vec{A} \cdot \vec{B}$ دارای مقدار ۱۴/۰ واحد است. زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ چیست؟

حل: از تعریف ضرب نقطه‌ای بین $\vec{A}$ و $\vec{B}$، یعنی $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$، داریم

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

به ازای $A = ۶/۰۰$، $B = ۷/۰۰$ و $\vec{A} \cdot \vec{B} = ۱۴/۰$، داریم $\cos\theta = ۰/۳۳۳$ یا $\theta = ۷۰/۵^\circ$.

** ۴۰ جابه‌جایی $\vec{d}_۱$ در صفحه‌ی yz قرار دارد و این بردار، که نسبت به جهت مثبت محور y زاویه‌ی $۶۳/۰°$ می‌سازد و دارای مؤلفه‌ی z مثبت است، بزرگی‌اش $۴/۵۰\,m$ است. جابه‌جایی $\vec{d}_۲$ در صفحه‌ی xz قرار دارد. این بردار که نسبت به جهت مثبت محور x زاویه‌ی $۳۰/۰°$ می‌سازد و دارای مؤلفه‌ی z مثبت است، بزرگی‌اش $۱/۴\,m$ است. مطلوب است تعیین (الف) $\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲$، (ب) $\vec{d}_۱\times\vec{d}_۲$، و (پ) زاویه‌ی میان $\vec{d}_۱$ و $\vec{d}_۲$.

حل: بردارهای جابه‌جایی را می‌توان به صورت زیر نوشت (برحسب متر):

$$\vec{d}_۱ = (۴/۵۰m)(\cos ۶۳°\,\hat{j} + \sin ۶۳°\,\hat{k}) = (۲\,m)\,\hat{j} + (۴\,m)\,\hat{k}$$

$$\vec{d}_۲ = (۱/۴۰m)(\cos ۳۰°\,\hat{i} + \sin ۳۰°\,\hat{k}) = (۱/۲۱\,m)\,\hat{i} + (۰/۷۰\,m)\,\hat{k}$$

(الف) ضرب نقطه‌ای $\vec{d}_۱$ و $\vec{d}_۲$ برابر است با

$$\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲ = (۲\,\hat{j} + ۴\,\hat{k})\cdot(۱/۲۱\,\hat{i} + ۰/۷۰\,\hat{k})$$
$$= (۴\,\hat{k})\cdot(۰/۷۰\,\hat{k}) = ۲/۸\,m^۲$$

(ب) ضرب برداری $\vec{d}_۱$ و $\vec{d}_۲$ برابر است با

$$\vec{d}_۱\times\vec{d}_۲ = (۲\,\hat{j} + ۴\,\hat{k})\times(۱/۲۱\,\hat{i} + ۰/۷۰\,\hat{k})$$
$$= (۲)(۱/۲۱)(-\hat{k}) + (۲)(۰/۷۰)\,\hat{i} + (۴)(۱/۲۱)\,\hat{j}$$
$$= (۱/۴۰\,\hat{i} + ۴/۸۴\,\hat{j} - ۲/۴۲\,\hat{k})\,m^۲$$

(پ) بزرگی‌های $\vec{d}_۱$ و $\vec{d}_۲$ عبارت‌اند از

$$d_۱ = \sqrt{(۲\,m)^۲ + (۴\,m)^۲} = ۴/۵\,m$$

$$d_۲ = \sqrt{(۱/۲۱\,m)^۲ + (۰/۷۰\,m)^۲} = ۱/۴۰\,m$$

در نتیجه زاویه‌ی بین این دو بردار برابر است با

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲}{d_۱d_۲}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{۲/۸\,m^۲}{(۴/۵\,m)(۱/۴۰\,m)}\right) = ۶۳/۶°$$

** ۴۱ با استفاده از تعریف ضرب نرده‌ای $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta$ و دانستن $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$، زاویه‌ی میان دو بردار $\vec{a} = ۳/۰\,\hat{i} + ۳/۰\,\hat{j} + ۳/۰\,\hat{k}$ و $\vec{b} = ۲/۰\,\hat{i} + ۱/۰\,\hat{j} + ۳/۰\,\hat{k}$ را حساب کنید.

حل: چون $ab\cos\phi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$، در نتیجه داریم

$$\cos\phi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab}$$

بزرگی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ عبارت‌اند از:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(۳/۰۰)^۲ + (۳/۰۰)^۲ + (۳/۰۰)^۲} = ۵/۲۰$$

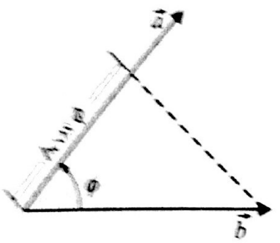
$$b = |\vec{b}| = \sqrt{(۲/۰۰)^۲ + (۱/۰۰)^۲ + (۳/۰۰)^۲} = ۳/۷۴$$

زاویه‌ی بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با

$$\cos\phi = \frac{(۳/۰۰)(۲/۰۰) + (۳/۰۰)(۱/۰۰) + (۳/۰۰)(۳/۰۰)}{(۵/۲۰)(۳/۷۴)} = ۰/۹۲۶$$

پس، زاویه مساوی با $\phi = ۲۲°$ است.

همان‌طور که از اسم ضرب نرده‌ای (یا نقطه‌ای) برمی‌آید، حاصل‌ضرب دو بردار یک کمیت نرده‌ای است. این ضرب را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب یک بردار در تصویر نرده‌ای بردار دیگر بر روی آن، در نظر گرفت (به شکل زیر و شکل ۳-۱۸ رجوع کنید).



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi = (a)(b\cos\phi)$$

** ۴۲ در یک نمایش صامت شخص ۱ جابه‌جایی $\vec{d}_۱ = (۴/۰m)\,\hat{i} + (۵/۰m)\,\hat{j}$ و شخص ۲ جابه‌جایی $\vec{d}_۲ = (-۳/۰m)\,\hat{i} + (۴/۰m)\,\hat{j}$ را انجام می‌دهند. حاصل عبارت‌های (الف) $\vec{d}_۱\times\vec{d}_۲$، (ب) $\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲$، (پ) $(\vec{d}_۱+\vec{d}_۲)\cdot\vec{d}_۲$، و (ت) تصویر $d_۱$ در راستای $\vec{d}_۲$ چقدر است؟ (*راهنمایی*: برای محاسبه‌ی قسمت (ت)، معادله‌ی ۳-۲۰ و شکل ۳-۱۸ را ببینید).

حل: دو بردار برحسب نمادگذاری بردارهای یکه به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\vec{d}_۱ = ۴/۰\,\hat{i} + ۵/۰\,\hat{j} = d_{۱x}\,\hat{i} + d_{۱y}\,\hat{j}$$

$$\vec{d}_۲ = -۳/۰\,\hat{i} + ۴/۰\,\hat{j} = d_{۲x}\,\hat{i} + d_{۲y}\,\hat{j}$$

(الف) حاصل‌ضرب برداری (ضربدری) آن‌ها برابر است با

$$\vec{d}_۱\times\vec{d}_۲ = (d_{۱x}d_{۲y} - d_{۱y}d_{۲x})\,\hat{k} =$$
$$[(۴/۰)(۴/۰) - (۵/۰)(-۳/۰)]\,\hat{k} = ۳۱\,\hat{k}$$

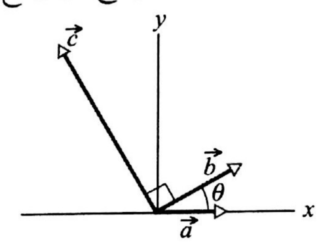
(ب) حاصل‌ضرب نرده‌ای (نقطه‌ای) آن‌ها برابر است با

$$\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲ = d_{۱x}d_{۲x} + d_{۱y}d_{۲y}$$
$$= (۴/۰)(-۳/۰) + (۵/۰)(۴/۰) = ۸/۰$$

(پ)
$$(\vec{d}_۱+\vec{d}_۲)\cdot\vec{d}_۲ = \vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲ + d_۲^۲ =$$
$$۸/۰ + (-۳/۰)^۲ + (۴/۰)^۲ = ۳۳$$

(ت) توجه کنید که بزرگی بردار $d_۱$ برابر است با $۶/۴ = \sqrt{۱۶+۲۵}$. با توجه به رابطه‌ی ضرب نقطه‌ای $۸ = (۵/۰)(۴/۶)\cos\theta$، داریم $\theta = ۷۵/۵^\circ$. بنابراین، مؤلفه‌ی بردار $d_۱$ در راستای بردار $d_۲$ برابر است با $۶/۴\cos\theta \approx ۱/۶$.

** ۴۳ سه بردار نشان داده شده در شکل ۳-۳۳، دارای بزرگی‌های $a = ۳/۰۰\,\mathrm{m}$، $b = ۴/۰۰\,\mathrm{m}$ و $c = ۱۰/۰\,\mathrm{m}$ هستند و $\theta = ۳۰/۰^\circ$. مطلوب است تعیین، (الف) مؤلفه‌ی x و (ب) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{a}$؛ (پ) مؤلفه‌ی x و (ت) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{b}$؛ (ث) مؤلفه‌ی x و (ج) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{c}$. اگر رابطه‌ی $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ برقرارباشد، مقادیر (چ) p و (ح) q، را پیدا کنید.



شکل ۳-۳۳ مسئله‌ی ۴۳.

حل: با توجه به شکل معلوم می‌شود که $\vec{c} \perp \vec{b}$، یعنی زاویه‌ی بین $\vec{c}$ و محور $+x$ مساوی با $\theta + ۹۰^\circ$ است. سه بردار را برحسب نمادگذاری بردارهای یکه به صورت زیر می‌نویسیم

$$\vec{a} = a_x\,\hat{\mathrm{i}}$$

$$\vec{b} = b_x\,\hat{\mathrm{i}} + b_y\,\hat{\mathrm{j}} = (b\cos\theta)\hat{\mathrm{i}} + (b\sin\theta)\hat{\mathrm{j}}$$

$$\vec{c} = c_x\,\hat{\mathrm{i}} + c_y\,\hat{\mathrm{j}} = [c\cos(\theta + ۹۰^\circ)]\hat{\mathrm{i}} + [c\sin(\theta + ۹۰^\circ)]\hat{\mathrm{j}}$$

با استفاده از روابط بالا می‌توانیم مؤلفه‌های بردارها را حساب کنیم.

(الف) مؤلفه‌ی x بردار $\vec{a}$ برابر است با

$$a_x = a\cos ۰^\circ = a = ۳/۰۰\,\mathrm{m}$$

(ب) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{a}$ برابر است با $a_y = a\sin ۰^\circ = ۰$

(پ) مؤلفه‌ی x بردار $\vec{b}$ برابر است با

$$b_x = b\cos ۳۰^\circ = (۴/۰۰\,\mathrm{m})\cos ۳۰^\circ = ۳/۴۶\,\mathrm{m}$$

(ت) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{b}$ برابر است با

$$b_y = b\sin ۳۰^\circ = (۴/۰۰\,\mathrm{m})\sin ۳۰^\circ = ۲/۰۰\,\mathrm{m}$$

(ث) مؤلفه‌ی x بردار $\vec{c}$ برابر است با

$$c_x = c\cos ۱۲۰^\circ = (۱۰/۰\,\mathrm{m})\cos ۱۲۰^\circ = -۵/۰۰\,\mathrm{m}$$

(ج) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{c}$ برابر است با

$$c_y = c\sin ۳۰^\circ = (۱۰/۰\,\mathrm{m})\sin ۱۲۰^\circ = ۸/۶۶\,\mathrm{m}$$

(چ) اگر رابطه‌ی $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$ برقرار باشد، داریم

$$\vec{c} = c_x\,\hat{\mathrm{i}} + c_y\,\hat{\mathrm{j}} = p(a_x\,\hat{\mathrm{i}}) + q(b_x\,\hat{\mathrm{i}} + b_y\,\hat{\mathrm{j}})$$

$$= (pa_x + qb_x)\hat{\mathrm{i}} + qb_y\,\hat{\mathrm{j}}$$

یا

$$c_x = pa_x + qb_x\ ,\ c_y = qb_y$$

با قرار دادن این مقدارها در رابطه‌ی ارائه شده، داریم

$$-۵/۰۰\,\mathrm{m} = p(۳/۰۰\,\mathrm{m}) + q(۳/۴۶\,\mathrm{m})$$

$$۸/۶۶\,\mathrm{m} = q(۲/۰۰\,\mathrm{m})$$

از حل کردن این معادله‌ها، $p = -۶/۶۷$ به دست می‌آید.

(ح) به طور مشابه، $q = ۴/۳۳$ به دست می‌آید (توجه کنید که بهتر است ابتدا q را به دست آوریم). عددهای p و q بدون یکا هستند.

** ۴۴ در ضرب برداری $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$، فرض کنید $q = ۲$، $\vec{v} = ۲/۰\hat{\mathrm{i}} + ۴/۰\hat{\mathrm{j}} + ۶/۰\hat{\mathrm{k}}$ و $\vec{F} = ۴/۰\hat{\mathrm{i}} - ۲۰\hat{\mathrm{j}} + ۱۲\hat{\mathrm{k}}$. به ازای $B_x = B_y$، بردار $\vec{B}$ با نمادگذاری بردارهای یکه چگونه است؟

حل: با استفاده از معادله‌ی ۳-۲۳، رابطه‌ی برداری $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$F_x\,\hat{\mathrm{i}} + F_y\,\hat{\mathrm{j}} + F_z\,\hat{\mathrm{k}} = q(v_y B_z - v_z B_y)\hat{\mathrm{i}} +$$
$$q(v_z B_x - v_x B_z)\hat{\mathrm{j}} + q(v_x B_y - v_y B_x)\hat{\mathrm{k}}$$

با قرار دادن مقادیر ارائه شده، داریم

$$۴/۰ = ۲(۴/۰B_z - ۶/۰B_y)$$

$$-۲۰ = ۲(۶/۰B_x - ۲/۰B_z)$$

$$۱۲ = ۲(۲/۰B_y - ۴/۰B_x)$$

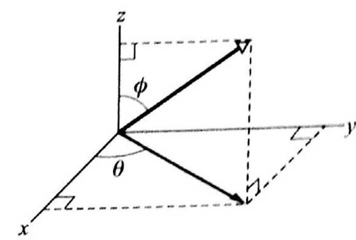
به ازای $B_x = B_y$، از معادله‌ی سوم مقدار $B_y = -۳/۰$ به‌دست می‌آید. این مقدار را در معادله‌ی اول قرار می‌دهیم، تا $B_z = -۴$ حاصل شود. در نتیجه جواب برابر است با

$$\vec{B} = -۳/۰\hat{\mathrm{i}} - ۳/۰\hat{\mathrm{j}} - ۴/۰\hat{\mathrm{k}}$$

مسئله‌های بیشتر

۴۵ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در صفحه‌ی xy دستگاه مختصات قرار دارند. $\vec{A}$ دارای بزرگی $۸/۰۰$ و زاویه‌ی ۱۳۰° و $\vec{B}$ دارای مؤلفه‌های $B_x = -۷/۷۲$ و $B_y = -۹/۲۰$ است. (الف) حاصل

$۵\vec A\cdot\vec B$ چیست؟ حاصل $۴\vec A\times ۳\vec B$ (ب) با نمادگذاری بردارهای یکه و (پ) با نمادگذاری بزرگی - زاویه در دستگاه مختصات کروی (شکل ۳-۳۴ را ببینید) چیست؟ (ت) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec A$ و $۴\vec A\times ۳\vec B$ چیست؟ (**راهنمایی**: پیش از انجام دادن محاسبه، اندکی فکر کنید). حاصل $\vec A+۳/۰۰\hat k$ (ث) با نمادگذاری بردارهای یکه و (ج) با نمادگذاری بزرگی - زاویه در دستگاه مختصات کروی، چیست؟



شکل ۳-۳۴ مسئله‌ی ۴۵.

حل: بردارها به صورت زیر داده شده‌اند

$$\vec A = ۸/۰۰(\cos ۱۳۰^\circ\,\hat i + \sin ۱۳۰^\circ\,\hat j) = -۵/۱۴\hat i + ۶/۱۳\hat j$$
$$\vec B = B_x\hat i + B_y\hat j = -۷/۷۲\hat i - ۹/۲۰\hat j$$

(الف) حاصل‌ضرب نقطه‌ای $۵\vec A\cdot\vec B$ برابر است با

$$۵\vec A\cdot\vec B = ۵(-۵/۱۴\hat i + ۶/۱۳\hat j)\cdot(-۷/۷۲\hat i - ۹/۲۰\hat j)$$
$$= ۵[(-۵/۱۴)(-۷/۷۲) + (۶/۱۳)(-۹/۲۰)] = -۸۳/۴$$

(ب) برحسب نمادگذاری بردارهای یکه، داریم

$$۴\vec A\times ۳\vec B = ۱۲\vec A\times\vec B = ۱۲(-۵/۱۴\hat i + ۶/۱۳\hat j)\times$$
$$(-۷/۷۲\hat i - ۹/۲۰\hat j) = ۱۲(۹۴/۶\hat k) = ۱/۱۴\times ۱۰^{۳}\hat k$$

(پ) می‌دانیم که زاویه‌ی سمتی برای یک بردار واقع در راستای محور z، تعریف نشده است. چون نتیجه‌ی به دست آمده «$۱/۱۴\times ۱۰^{۳}$» است، θ مشخص نیست (تعریف نشده است)، لذا $\phi = ۰$ است.

(ت) چون $\vec A$ در صفحه‌ی xy قرار دارد، و $\vec A\times\vec B$ بر آن صفحه عمود است، لذا جواب ۹۰° است.

(ث) داریم $\vec A + ۳/۰۰\hat k = -۵/۱۴\hat i + ۶/۱۳\hat j + ۳/۰۰\hat k$.

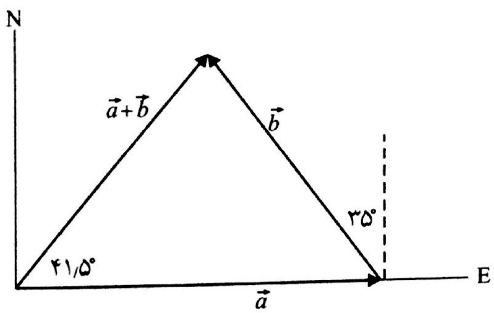
(ج) بزرگی بردار $\vec A$ با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس برابر است با $A = \sqrt{(۵/۱۴)^۲ + (۶/۱۳)^۲ + (۳/۰۰)^۲} = ۸/۵۴$. زاویه‌ی سمتی $\theta = ۱۳۰^\circ$ است، که در صورت مسئله نیز داده شده است [$\vec A$ تصویر بردار جدید به وجود آمده در قسمت (ث)، بر روی صفحه‌ی xy است]. زاویه‌ی اندازه‌گیری شده نسبت به محور $+z$ برابر است با:

$$\phi = \cos^{-۱}(۳/۰۰/۸/۵۴) = ۶۹/۴^\circ$$

۴۶ بردار $\vec a$ دارای بزرگی $۵/۰\,\mathrm{m}$ و به سمت خاور است. بردار $\vec b$ دارای بزرگی $۴/۰\,\mathrm{m}$ و در جهت ۳۵ درجه‌ی باختر محور شمالی است. (الف) بزرگی و (ب) جهت بردار $\vec a+\vec b$ چیست؟ (پ) بزرگی و (ت) جهت بردار $\vec b-\vec a$ چیست؟ (ث) نمودار برداری مربوط به هر ترکیب را رسم کنید.

حل: بردارها در شکل زیر نشان داده شده‌اند. محور x از باختر به خاور و محور y از جنوب به شمال کشیده شده‌اند. بنابراین، $a_x = ۵/۰\,\mathrm{m}$ و $a_y = ۰$ و داریم:

$$b_x = -(۴/۰\,\mathrm{m})\sin ۳۵^\circ = -۲/۲۹\,\mathrm{m}$$
$$b_y = (۴/۰\,\mathrm{m})\cos ۳۵^\circ = ۳/۲۸\,\mathrm{m}$$



(الف) فرض می‌کنیم $\vec c = \vec a + \vec b$ در نتیجه داریم

$$c_x = a_x + b_x = ۵/۰۰\,\mathrm{m} - ۲/۲۹\,\mathrm{m} = ۲/۷۱\,\mathrm{m}$$
$$c_y = a_y + b_y = ۰ + ۳/۲۸\,\mathrm{m} = ۳/۲۸\,\mathrm{m}$$

پس، بزرگی بردار $\vec c$ برابر است با

$$c = \sqrt{c_x^۲ + c_y^۲} = ۵/۰\,\mathrm{m}$$

(ب) زاویه‌ی θ که $\vec c = \vec a + \vec b$ با محور $+x$ تشکیل می‌دهد، برابر است با

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{c_y}{c_x}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{۳/۲۸}{۲/۷۱}\right) = ۴۱/۵^\circ \approx ۵۰^\circ$$

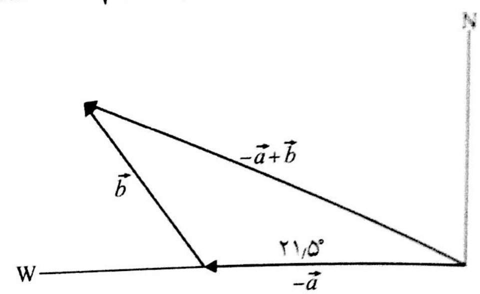
جواب ممکن دوم، $\theta = ۵۰^\circ + ۱۸۰^\circ = ۲۳۰^\circ$ است که آن را حذف کرده‌ایم، زیرا جهت آن برخلاف جهت $\vec c$ است.

(پ) بردار $\vec b - \vec a$ از مجموع $-\vec a$ و $\vec b$ به دست می‌آید. نتیجه را

در سمت راست شکل زیر نشان داده‌ایم. فرض می‌کنیم $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$. مؤلفه‌های این بردار عبارت‌اند از

$$c_x = b_x - a_x = -۲/۲۹\,\text{m} - ۵/۰۰\,\text{m} = -۷/۲۹\,\text{m}$$
$$c_y = b_y - a_y = ۳/۲۸\,\text{m}$$

بزرگی بردار $\vec{c}$ مساوی با $c = \sqrt{c_x^۲ + c_y^۲} = ۸/۹\,\text{m}$ است.



(ت) تانژانت زاویه‌ی θ که بردار $\vec{c}$ با محور $x+$ (خاور) تشکیل می‌دهد، برابر است با

$$\tan\theta = \frac{c_y}{c_x} = \frac{۳/۲۸\,\text{m}}{-۸/۲۹\,\text{m}}$$

دو مقدار برای این زاویه به دست می‌آید: $-۲۱/۵°$ و $۲۰۱/۵°$. همان‌طور که شکل نشان می‌دهد، جواب دوم درست است. بردار $\vec{c} = -\vec{a} + \vec{b}$ تحت زاویه‌ی $۲۲°$ در شمال محور باختری قرار دارد.

۴۷ بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ در صفحه‌ی xy یک دستگاه مختصات قرار دارند. $\vec{A}$ دارای بزرگی ۸/۰۰ و زاویه‌ی $۱۳۰°$ و $\vec{B}$ دارای مؤلفه‌های $B_x = -۷/۷۲$ و $B_y = -۹/۲۰$ است. زاویه‌های میان محور منفی y و (الف) جهت $\vec{A}$ و (ب) جهت حاصل‌ضرب $\vec{A}\times\vec{B}$، و (پ) جهت $\vec{A}\times(\vec{B}+۳/۰۰\hat{k})$، چیست؟

حل: با توجه به این که زاویه‌ی $۱۳۰°$ در جهت پادساعتگرد نسبت به محور x اندازه‌گیری شده است، دو بردار را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\vec{A} = ۸/۰۰(\cos ۱۳۰°\,\hat{i} + \sin ۱۳۰°\,\hat{j}) = -۵/۱۴\hat{i} + ۶/۱۳\hat{j}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} = -۷/۷۲\hat{i} - ۹/۲۰\hat{j}$$

(الف) زاویه‌ی بین جهت منفی محور y $(-\hat{j})$ و جهت بردار $\vec{A}$ برابر است با

$$\theta = \cos^{-۱}\left(\frac{\vec{A}\cdot(-\hat{j})}{A}\right) = \cos^{-۱}\left(\frac{-۶/۱۳}{\sqrt{(-۵/۱۴)^۲ + (۶/۱۳)^۲}}\right)$$
$$= \cos^{-۱}\frac{-۶/۱۳}{۸/۰۰} = ۱۴۰°$$

به جای آن می‌توان گفت که محور $y-$ متناظر با زاویه‌ی $۲۷۰°$ است و جواب برابر است با $۲۷۰° - ۱۳۰° = ۱۴۰°$.

(ب) چون محور y در صفحه‌ی xy قرار دارد، و $\vec{A}\times\vec{B}$ بر آن صفحه عمود است، در نتیجه جواب $۹۰/۰°$ است.

(پ) این بردار را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$\vec{A}\times(\vec{B}+۳/۰۰\hat{k}) = (-۵/۱۴\hat{i} + ۶/۱۳\hat{j})\times$$
$$\times(-۷/۷۲\hat{i} - ۹/۲۰\hat{j} + ۳/۰۰\hat{k}) = ۱۸/۳۹\hat{i} + ۱۵/۴۲\hat{j} + ۹۴/۶۱\hat{k}$$

بزرگی این زاویه $|\vec{A}\times(\vec{B}+۳/۰۰\hat{k})| = ۹۷/۶$ است. زاویه‌ی بین جهت منفی محور y $(-\hat{j})$ و جهت بردار مذکور برابر است با

$$\theta = \cos^{-۱}\left(\frac{-۱۵/۴۲}{۹۷/۶}\right) = ۹۹/۱°$$

۴۸ مؤلفه‌های دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برحسب متر، عبارت‌اند از: $a_x = ۳/۲$، $a_y = ۱/۶$، $b_x = ۰/۵۰$ و $b_y = ۴/۵$. (الف) زاویه‌ی میان بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید. در صفحه‌ی xy دو بردار با بزرگی ۵/۰m وجود دارند که بر بردار $\vec{a}$ عمودند. یکی بردار $\vec{c}$، دارای مؤلفه‌ی x مثبت، و دیگری بردار $\vec{d}$، دارای مؤلفه‌ی x منفی، است. (ب) مؤلفه‌ی x و (پ) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{c}$، و (ت) مؤلفه‌ی x و (ث) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{d}$، چیست؟

حل: یکای طول‌ها متر است.

(الف) ابتدا بزرگی بردارها را به دست می‌آوریم:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{(۳/۲)^۲ + (۱/۶)^۲} = ۳/۶$$
$$b = |\vec{b}| = \sqrt{(۰/۵۰)^۲ + (۴/۵)^۲} = ۴/۵۳$$

در نتیجه داریم:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = ab\cos\phi$$
$$(۳/۲)(۰/۵۰) + (۱/۶)(۴/۵) = (۳/۶)(۴/۵۳)\cos\phi$$

از اینجا زاویه‌ی $\phi = ۵۷/۳°$ به دست می‌آید (زیرا هر دو بردار در یک ربع دستگاه مختصات قرار دارند).

(ب) چون زاویه‌ی بردار $\vec{a}$ (نسبت به محور $x+$) مساوی با $\tan^{-۱}(۱/۶/۳/۲) = ۲۶/۶°$ است، زاویه‌ی بردار $\vec{c}$ مساوی با $۲۶/۶° - ۹۰° = -۶۳/۴°$ است. (مقدار ممکن دیگر برای زاویه، $۲۶/۶° + ۹۰°$ است که باعث می‌شود $c_x < ۰$ باشد). بنابراین، داریم

$$c_x = c\cos(-۶۳/۴°) = ۲/۲\,\text{m}$$

(پ) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{c}$ برابر است با

$$c_y = c\sin(-۶۳/۴°) = -۴/۵\,\text{m}$$

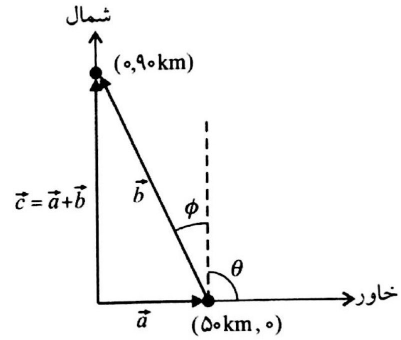
(ت) زاویه‌ی بردار $\vec{d}$ مساوی با $۱۱۶/۶° = ۹۰° + ۲۶/۶°$ است، لذا مؤلفه‌ی x بردار $\vec{d}$ برابر است با

$$d_x = d\cos(۱۱۶/۶°) = -۲/۲\,\text{m}$$

(ث) سرانجام، $d_y = d\sin ۱۱۶/۶° = ۴/۵\,\text{m}$ است.

۴۹ یک قایق بادبانی قرار است در امریکا از ساحل دریاچه‌ی اِری به سمت شهری در کانادا شروع به حرکت کند و به اندازه‌ی ۹۰/۰km به سوی شمال پیش برود. اما قایق‌ران متوجه می‌شود که قایق او به اندازه‌ی ۵۰/۰km به سوی خاور نقطه‌ی شروع حرکتش پیش رفته است. (الف) اکنون، او قایق خود را (الف) تا چه مسافتی و (ب) در چه جهتی باید براند تا به مقصد اصلی‌اش برسد؟

حل: وضعیت توصیف شده، در شکل زیر نشان داده شده است.



فرض می‌کنیم $\vec{a}$ معرف قسمت اول سفر (۵۰/۰km به طرف خاور) و $\vec{c}$ معرّف سفر مورد نظر (۹۰/۰km به طرف شمال) است. ما می‌خواهیم بردار $\vec{b}$ را طوری پیدا کنیم که شرط $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ برقرار باشد.

(الف) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، مسافت پیموده شده توسط قایق برابر است با

$$b = \sqrt{(۵۰/۰\,\text{km})^۲ + (۹۰/۰\,\text{km})^۲} = ۱۰۳\,\text{km}$$

(ب) جهت حرکت قایق برابر است با

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{۵۰/۰\,\text{km}}{۹۰/۰\,\text{km}}\right) = ۲۹/۱°$$

این زاویه معرّف باختر محور شمالی (معادل $۶۰/۹°$ شمال محور باختری) است.

توجه کنید که این مسئله را با نوشتن بردارها برحسب نمادگذاری بردارهای یکه نیز می‌توان حل کرد: $\vec{a} = (۵۰/۰\,\text{km})\hat{\text{i}}$، $\vec{c} = (۹۰/۰\,\text{km})\hat{\text{j}}$. در نتیجه داریم

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a} = -(۵۰/۰\,\text{km})\hat{\text{i}} + (۹۰/۰\,\text{km})\hat{\text{j}}$$

زاویه‌ی بین بردار $\vec{b}$ و محور $+x$ برابر است با

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{۹۰/۰\,\text{km}}{-۵۰/۰\,\text{km}}\right) = ۱۱۹/۱°$$

رابطه‌ی بین زاویه‌ی θ و زاویه‌ی ϕ به‌صورت $\theta = ۹۰° + \phi$ است.

۵۰ بردار $\vec{d}_۱$ در جهت منفی محور y و بردار $\vec{d}_۲$ در جهت مثبت محور x قرار دارد. جهت بردارهای (الف) $\vec{d}_۲/۴$ و (ب) $\vec{d}_۱/(-۴)$، چیست؟ بزرگی حاصل‌ضرب‌های (پ) $\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲$ و (ت) $\vec{d}_۱\cdot(\vec{d}_۲/۴)$ چیست؟ جهت بردار حاصل از (ث) $\vec{d}_۱\times\vec{d}_۲$ و (ج) $\vec{d}_۲\times\vec{d}_۱$ چیست؟ بزرگی حاصل‌ضرب برداری در (چ) قسمت (ث) و (ح) در قسمت (ج) چقدر است؟ (خ) بزرگی و (د) جهت $\vec{d}_۱\times(\vec{d}_۲/۴)$ چیست؟

حل: بردار $\vec{d}_۱/(-۴) = (d_۱/۴)\hat{\text{j}}$ در جهت $+y$ است. علامت منفی (در «۴-») روی جهت مؤثر است: $-(-y) = +y$

(پ) $\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲ = ۰$ زیرا $\hat{\text{i}}\cdot\hat{\text{j}} = ۰$ است. این دو بردار بر یکدیگر عمودند.

(ت) مانند قسمت (پ)، $\vec{d}_۱\cdot(\vec{d}_۲/۴) = (\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲)/۴ = ۰$.

(ث) $\vec{d}_۱\times\vec{d}_۲ = -d_۱d_۲(\hat{\text{j}}\times\hat{\text{i}}) = d_۱d_۲\hat{\text{k}}$، در جهت $+z$.

(ج) $\vec{d}_۲\times\vec{d}_۱ = -d_۲d_۱(\hat{\text{i}}\times\hat{\text{j}}) = -d_۱d_۲\hat{\text{k}}$، در جهت $-z$.

(چ) بزرگی بردار قسمت (ث) برابر است با $d_۱d_۲$.

(ح) بزرگی بردار قسمت (ج) برابر است با $d_۱d_۲$.

(خ) چون $\vec{d}_۱\times(\vec{d}_۲/۴) = (d_۱d_۲/۴)\hat{\text{k}}$، لذا بزرگی آن برابر است با $d_۱d_۲/۴$.

(د) بردار $\vec{d}_۱\times(\vec{d}_۲/۴) = (d_۱d_۲/۴)\hat{\text{k}}$ در جهت $+z$ است.

۵۱ ***گسل‌های صخره‌ای*** گسیختگی‌هایی هستند که در طول آن‌ها وجه‌های مقابل صخره روی یکدیگر حرکت می‌کنند. در شکل ۳-۳۵، پیش از حرکت کردن صخره به سمت پایین و راست،

(پ) مؤلفه‌ی y بردار $\vec{c}$ برابر است با

$$c_y = c\sin(-۶۳/۴^\circ) = -۴/۵\ \text{m}$$

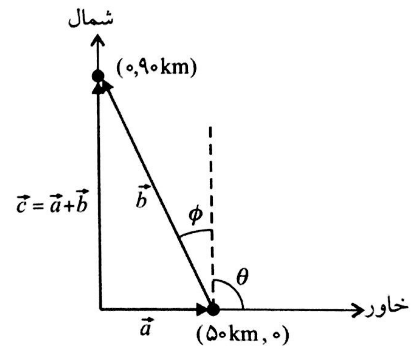
(ت) زاویه‌ی بردار $\vec{d}$ مساوی با $۱۱۶/۶^\circ = ۹۰^\circ + ۲۶/۶^\circ$ است، لذا مؤلفه‌ی x بردار $\vec{d}$ برابر است با

$$d_x = d\cos(۱۱۶/۶^\circ) = -۲/۲\ \text{m}$$

(ث) سرانجام، $d_y = d\sin ۱۱۶/۶^\circ = ۴/۵\ \text{m}$ است.

۴۹ یک قایق بادبانی قرار است در امریکا از ساحل دریاچه‌ی اِری به سمت شهری در کانادا شروع به حرکت کند و به اندازه‌ی $۹۰/۰\ \text{km}$ به سوی شمال پیش برود. اما قایق‌ران متوجه می‌شود که قایق او به اندازه‌ی $۵۰/۰\ \text{km}$ به سوی خاور نقطه‌ی شروع حرکتش پیش رفته است. (الف) اکنون، او قایق خود را (الف) تا چه مسافتی و (ب) در چه جهتی باید براند تا به مقصد اصلی‌اش برسد؟

حل: وضعیت توصیف شده، در شکل زیر نشان داده شده است.



فرض می‌کنیم $\vec{a}$ معرف قسمت اول سفر ($۵۰/۰\ \text{km}$ به طرف خاور) و $\vec{c}$ معرّف سفر مورد نظر ($۹۰/۰\ \text{km}$ به طرف شمال) است. ما می‌خواهیم بردار $\vec{b}$ را طوری پیدا کنیم که شرط $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ برقرار باشد.

(الف) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، مسافت پیموده شده توسط قایق برابر است با

$$b = \sqrt{(۵۰/۰\ \text{km})^۲ + (۹۰/۰\ \text{km})^۲} = ۱۰۳\ \text{km}$$

(ب) جهت حرکت قایق برابر است با

$$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{۵۰/۰\ \text{km}}{۹۰/۰\ \text{km}}\right) = ۲۹/۱^\circ$$

این زاویه معرّف باختر محور شمالی (معادل $۶۰/۹^\circ$ شمال محور باختری) است.

توجه کنید که این مسئله را با نوشتن بردارها برحسب نمادگذاری بردارهای یکه نیز می‌توان حل کرد: $\vec{a} = (۵۰/۰\ \text{km})\,\hat{\text{i}}$، $\vec{c} = (۹۰/۰\ \text{km})\,\hat{\text{j}}$. در نتیجه داریم

$$\vec{b} = \vec{c} - \vec{a} = -(۵۰/۰\ \text{km})\,\hat{\text{i}} + (۹۰/۰\ \text{km})\,\hat{\text{j}}$$

زاویه‌ی بین بردار $\vec{b}$ و محور $+x$ برابر است با

$$\phi = \tan^{-۱}\left(\frac{۹۰/۰\ \text{km}}{-۵۰/۰\ \text{km}}\right) = ۱۱۹/۱^\circ$$

رابطه‌ی بین زاویه‌ی θ و زاویه‌ی ϕ به‌صورت $\theta = ۹۰^\circ + \phi$ است.

۵۰ بردار $\vec{d}_۱$ در جهت منفی محور y و بردار $\vec{d}_۲$ در جهت مثبت محور x قرار دارد. جهت بردارهای (الف) $\vec{d}_۲/۴$ و (ب) $\vec{d}_۱/(-۴)$، چیست؟ بزرگی حاصل‌ضرب‌های (پ) $\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲$ و (ت) $\vec{d}_۱\cdot(\vec{d}_۲/۴)$ چیست؟ جهت بردار حاصل از (ث) $\vec{d}_۱\times\vec{d}_۲$ و (ج) $\vec{d}_۲\times\vec{d}_۱$ چیست؟ بزرگی حاصل‌ضرب برداری در (چ) قسمت (ث) و (ح) در قسمت (ج) چقدر است؟ (خ) بزرگی و (د) جهت $\vec{d}_۱\times(\vec{d}_۲/۴)$ چیست؟

حل: بردار $\vec{d}_۱/(-۴) = (d_۱/۴)\,\hat{\text{j}}$ در جهت $+y$ است. علامت منفی (در «۴-») روی جهت مؤثر است: $-(-y) = +y$

(پ) $\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲ = ۰$ زیرا $\hat{\text{i}}\cdot\hat{\text{j}} = ۰$ است. این دو بردار بر یکدیگر عمودند.

(ت) مانند قسمت (پ)، $\vec{d}_۱\cdot(\vec{d}_۲/۴) = (\vec{d}_۱\cdot\vec{d}_۲)/۴ = ۰$.

(ث) $\vec{d}_۱\times\vec{d}_۲ = -d_۱d_۲(\hat{\text{j}}\times\hat{\text{i}}) = d_۱d_۲\hat{\text{k}}$، در جهت $+z$.

(ج) $\vec{d}_۲\times\vec{d}_۱ = -d_۲d_۱(\hat{\text{i}}\times\hat{\text{j}}) = -d_۱d_۲\hat{\text{k}}$، در جهت $-z$.

(چ) بزرگی بردار قسمت (ث) برابر است با $d_۱d_۲$.

(ح) بزرگی بردار قسمت (ج) برابر است با $d_۱d_۲$.

(خ) چون $\vec{d}_۱\times(\vec{d}_۲/۴) = (d_۱d_۲/۴)\hat{\text{k}}$، لذا بزرگی آن برابر است با $d_۱d_۲/۴$.

(د) بردار $\vec{d}_۱\times(\vec{d}_۲/۴) = (d_۱d_۲/۴)\hat{\text{k}}$ در جهت $+z$ است.

۵۱ ***گسل‌های صخره‌ای*** گسیختگی‌هایی هستند که در طول آن‌ها وجه‌های مقابل صخره روی یکدیگر حرکت می‌کنند. در شکل ۳-۳۵، پیش از حرکت کردن صخره به سمت پایین و راست،